Тензорска алгебра – Општи тензорски рачун

Закон трансформације

Афини простор. Да би се физички закони могли формулисати у облику који је инваријантан у одн. на трансформације коорд. у n-димензионом простору потребно је увести математички апарат који описује величине везаним за свој закон трансформације. Такав математ. апарат нам пружа општи тензорски рачун који има посебан значај у теорији релативности.

По аналогији са појмом тачке у тродимензион. Еуклидовом простору, ма какав уређени скуп бројева

$$X=(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (1)$$

се зове тачка, а величине x^i координате те тачке, при чему се по конвенцији употребљавају горњи индекси. Скуп свих оваквих уређ. тачака зове се афини n-димензиони простор који у општем случају не мора бити метрички. Под метричким простором подразумевамо простор у коме је дефинисан појам растојања.

Линије и површи → Уобичајене геометријске појмове из тродим. Еуклидовог простора генералишемо на n-димензиони простор уводећи одговарајуће дефиниције. При томе, подразумева их је дефинисати интерпретативним ~~ал~~ аналитичким ~~изразима~~ изразима који су генерализација одговарајућих израза из тродим. Еуклидовог простора (као што је нпр. појам тачке). Тиме уобичајени геометријски појмови постају спец. случај ових општијих појмова.

Посматрајмо случај када су све координате x^i ф-је од m параметара t_k.

$$x^i = x^i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \quad \ldots (2), \qquad i=1,2,\ldots,n, \quad k=1,\ldots,m$$

Свакој скупу вредности параметара t_k одговара једна тачка $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, а скуп свих дефинисаних тачака за све вредности свих параметара назива се варијетет од m димензија.

За $m=1$ варијетет је линија, па је $x^i=x^i(t_1)$, $x=(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t))$

За $m=2$ -||- површ, па је $x^i=x^i(t_1, t_2)$

За $m=n-1$ -||- хиперповрш, па је $x^i=x^i(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$

У последњем случају можемо из n једначина у (2) елиминисати $n-1$ параметара t_k и тиме добијемо једначину хиперповрши облика:

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n)=0 \quad \ldots (3)$$

Трансформације координата

Нека су $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $\bar{x}=(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ координате исте тачке у две различите n-димензионе системе и нека је веза између њих:

$$\cancel{\overline{x}^i = x^i + c^i} \qquad \overline{x}^i = \overline{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \;\dots\; (4) \quad i = 1, 2, \dots n$$

Нека су ове ф-је свуда диференцијабилне и решиве по старим координатама на следећи начин:

$$x^i = x^i(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \dots, \overline{x}^n) \;\dots\; (5)$$

Да би ова инверзија била могућа, њихов јакобијан мора бити различит од 0

$$D = \left| \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \right| \neq 0 \;\dots\; (6)$$

Такве релације (4), које морају бити униформне ф-је, дефинишу трансформације координата из једног система у други. Најважније су линеарне трансф.

$$\overline{x}^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i x^k + b^i \;\dots\; (7)$$

Ајнштајнова конвенција - усвојен договор да се исти индекс појављује два пута и то једном као горњи, а једном као доњи, подразумијева се сумирање по том индексу. У изводима облика $\partial a^i / \partial x^k$ индекс k сматрати доњим. Ово је генерализација раније уведене сумационе конвенције где се сумирало по поновљеним латинским индексима. Тада је (7):

$$\overline{x}^i = a_k^i x^k + b^i \;\dots\; (8)$$

Величине различите природе се различито понашају према трансформ. коорд. сист. (4).

Пр.

(I) У случају транслације система веза између координата у два система дата

(9) $\overline{x}^i = x^i + c^i$, c^i → координате новог коорд. почетка

датом трансформ. коорд. при ротацији коорд. система, тј. при прелазу из $Ox_1x_2x_3$ у $Ox_1'x_2'x_3'$.

II Ротација система, када се координате трансформишу према $x_i' = \lambda_{ik} x_k$, $\lambda_{ik} = \cos(\vec{e}_i\,', \vec{e}_k)$, а он према Ајнштајновој конвенцији има облик:

$$\bar{x}^i = \lambda^i_k x^k \quad \ldots (10)$$

где су λ^i_k косинуси праваца нових коорд. оса.

III Инверзија оријентације осе када имамо тзв. огледалске координате

$x_i' = -x_i$ тј. $\bar{x}^i = -x^i$ ... (11)

(правих и псеудовектора)

Док се у односу на прве двије трансформације сви вектори у класичној теорији понашају на исти начин, у одн. на ову последњу испоставља се битна разлика између правих вектора и псеудовектора: први при трансформацији огледалске координата мијењају знак, док га други не мијењају.

Скалари или инваријанте

Нека је ϕ нека ф-ја координата x^i, а $\bar{\Phi}$ је ф-ја која се добија из ϕ трансформацијом координата: $\bar{\Phi} = \phi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $x^i = x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$

тј. је: $\bar{\Phi} = \phi\left[x^1(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n), \ldots, x^n(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)\right]$,

где су $x^i(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ инверзне трансформације координата (5).

Ако је у свакој тачки простора

$$\bar{\Phi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) = \phi(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad \ldots (12)$$

тј. ако вриједност ове ф-је при трансформацији координата у свакој тачки остаје непромијењена, она се зове скалар или инваријанта.

Тензори III

Тензорска алгебра – појмови

Нпр. квадрат растојања неке тачке од коорд. почетка:

$$r^2=(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$$

Ако се изврши ротација коорд. сис., ова величина ће у свакој тачки остати непромењена:

$$\bar{r}^2=(\bar{x}^1)^2+(\bar{x}^2)^2+(\bar{x}^3)^2=r^2 \quad \text{--}(13)$$

тј. услов (12) је испуњен и представља апсолутну инваријанту. Збир квадрата $(x^1)^2+(x^2)^2$ неће остати инваријантан осим ако при ротацији око x_3-осе па по према деф. није скалар.

Ако величине при трансформацији коорд. мењају знак тј.

$$\bar{\phi}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) = -\phi(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad \text{--}(14)$$

зову се псеудоскалари. Нпр. запремина $V=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ и трансформ. огледања координата. При томе ће сви вектори па и запремина V променити знак у складу са (14).

Коваријантни и контраваријантни вектори

Посматрајмо скуп од n величина $A(i)$ где i узима све вредности од 1 до n. Ако се ове величине при трансформацији коорд. (4) трансформишу према закону

$$\bar{A}(i)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}A(k) \quad \text{--}(15)$$

, онда скуп $A(i)$ назива се контраваријантни вектор у ознаци A^i. Значи, контраваријантни вектор је деф. законом трансформације:

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^k, \quad ...(16) \rightarrow \text{сумирање по } k$$

Коеф. $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$ су одређени законом трансформ. координата (4) који мора бити [illegible].

У случају линеарних трансформ. (8) биће:

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = a^i_k, \text{ па горњи закон постаје}$$

$$\bar{A}^i = a^i_k A^k \quad ...(17). \rightarrow A'_i = a_{ik} A_k$$

закон трансф. комп. вектора при ротацији коорд. система

Поређењем са ~~(…)~~ видимо да у одн. на ротацију се вектори у простору Еуклидовом простору представљају спец. случај контраваријантних вектора. Међутим при трансформацији $\bar{x}^i = -x^i$ имамо $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} = -\delta^i_k$, па према (16) биће

$$\bar{A}^i = -\delta^i_k A^k = -A^i \quad ...(18)$$

видимо да у одн. на одређене коорд. само прави вектори представљају контраваријантне векторе.

Ако имамо n величина A_i које се трансформишу према закону:

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} A_k \quad ...(19),$$

онда скуп A_i се назива коваријантан вектор и означава се доњим индексима.

Пример 1. Посматрајмо скуп диференцијала координата dx^i. Тотални диференцијал је:

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} dx^k \quad ...(20), \text{ па поређењем са (16)}$$

видимо да се ове величине трансформишу по закону контраваријантних вектора тј. скуп dx^i је контраваријантан вектор.

Пример 2. – Скуп парцијалних извода скалара $\phi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ по координатама $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$.
По обрасцу за сложено диференцирање имамо:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}, \text{ тј. } \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \quad \text{--(21)}$$

одакле, према (19) закључујемо да је скуп $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$ коваријантан вектор.

Пример 3. Скуп $\frac{dA^i}{dt}$, тј. извод неког контраваријантног вектора по неком скалару t.
Ако (15) диференцирамо по t, добићемо:

$$\frac{d\bar{A}^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right) A^k + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{dA^k}{dt}, \text{ тј.}$$

$$\frac{d\bar{A}^i}{dt} = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} \cdot \frac{dx^l}{dt} A^k + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{dA^k}{dt} \quad \text{--(22)}$$

Одавде следи да скуп $\frac{dA^i}{dt}$ у општем случају није вектор. Међутим, ако су трансф. линеарне први члан отпада па по основу (13) скуп $\frac{dA^i}{dt}$ за одн. на линеарне трансформације представља контраваријантан вектор.

Тензорске величине

Контраваријантни, коваријантни и мешовити тензори

Уочимо скуп од n^2 величина $A(i,j)$, где i и j иду од 1 до n. Ако се ове величине при трансф. координата (4) трансформишу према закону

$$\bar{A}(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A(k,l) \quad \text{--(23)}, \text{ такав скуп}$$

$A(i,j)$ назива се контраваријантни тензор и означава се горњим индексима A^{ij}. Дакле, контраварн. тензор је дефинисан законом трансформације

$$\overline{A^{ij}} = \frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \overline{x^j}}{\partial x^l} A^{kl} \quad -- (24) \rightarrow \text{сумирање по } k \text{ и } l.$$

За линеарне трансформ. (8) имамо:

$$\frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^k} = a^i_k, \quad \frac{\partial \overline{x^j}}{\partial x^l} = a^j_l,$$ па се горњи закон своди на:

$$\overline{A^{ij}} = a^i_k \cdot a^j_l \cdot A^{kl}. \quad (25)$$

Поређењем са $T'_{ij} = \alpha_{ik} T_{kl} (\vec{e_j'} \cdot \vec{e_l}) = \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl}$ → закон трансформ. компоненти тензора при ротацији коорд. оса, закључујемо да у одн. на ротацију оса тензори у тродим. Еуклидовом простору представљају спец. случај контраваријантних тензора.

Ако закон трансформ. има облик:

$$\overline{A_{ij}} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x^i}} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x^j}} A_{kl} \quad -- (26),$$ скуп A_{ij} се зове

коваријантни тензор, а ако је: $$\overline{A^i_j} = \frac{\partial \overline{x^i}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x^j}} A^k_l \quad -- (27)$$

скуп A^i_j представља мешовити тензор (једном контраваријантан и једном коваријантан). При томе се коваријантни тензор означава доњим индексима, а мешовити једним горњим и једним доњим. Ако скуп од n^2 величина не задовољава ни један од наведених закона, онда он не представља тензор. Дакле, ова скуп дефиниција одређује критеријуме на основу којих знамо да ли је неки скуп од n^2 величина тензор или не.

За карактер посматраних величина од посебног је значаја број и распоред индекса, при чему се број индекса назива ред или ранг тензора. Тако посматрани скалари су тензори нултог реда, вектори првог, а повериши тензори другог реда.

Пример 1. Посматрајмо скуп производа две контраваријантна вектора $A^i B^j$. Они су одређени законом трансформације (16)

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^k, \quad \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} B^l$$, а одатле следи

$$\bar{A}^i \cdot \bar{B}^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^k B^l \quad -- (28)$$

те поређењем са (24) видимо да је скуп $A^i B^j$ контраваријантни тензор.

→ овом означавамо величину у чију коју природу нисмо сигурни већ је тек испитујемо!

Пример 2. Кронекеров симбол ~~$\delta_{(i,j)}$~~ $\delta_{(i,j)}$ је 1 за $i=j$ и 0 за $i \neq j$. Како је: $\delta(i,j) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$, онда

$$\bar{\delta}_{(i,j)} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}$$, а десна страна се

може написати у облику: $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \delta_{(k,l)}$ јер је: (→ сумирање по k и l)

$$\delta_{(k,l)} = \frac{\partial x^k}{\partial x^l} \text{ те имамо } \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x^l} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \text{ и,}$$

добијамо: $$\bar{\delta}_{(i,j)} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \delta_{(k,l)} \quad -- (29).$$

Поређењем са (27) видимо да је Кронекеров симбол $\delta_{(i,j)}$ мешовити тензор другог реда тј. δ^i_j и то је генерализација Кронекеровог симбола уведеног раније:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Пример 3. Испитајмо како се трансформишу компоненте скупа парцијалних извода $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ коваријантног вектора. Према (19) имамо:

$$\bar A_i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^i} A_k,$$ па диференц. по $\bar x^j$ добијамо:

јер је ово новр. а у зад. $\frac{\partial}{\partial e} A^i$ је 1 израчунато

$$\frac{\partial \bar A_i}{\partial \bar x^j} = \frac{\partial}{\partial \bar x^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial \bar x^i}\right) A_k + \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^i}\cdot\frac{\partial A_k}{\partial \bar x^j}, \text{ тј.}$$

$$\frac{\partial \bar A_i}{\partial \bar x^j} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j} A_k + \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^i}\cdot\frac{\partial x^l}{\partial \bar x^j}\cdot\frac{\partial A_k}{\partial x^l} \quad \text{--- (30)}$$

одакле закључујемо да скуп $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ у општем случају није тензор. Ако су трансформ. линеарне, први члан отпада, па на основу (27) произилази да у случају линеарних трансформ. скуп $\frac{\partial A_i}{\partial x^j}$ представља коваријантан тензор.

Симетрични и антисиметрични тензори

Тензор је симетричан у односу на два индекса ако његове компоненте остају непромењене после измене ових индекса, под условом да су оба индекса контраваријантна или коваријантна. Нпр. ако је $A^{ijk}_{lm} = A^{jik}_{lm}$, овај тензор је симетричан у одн. на индексе i и j.

тензор 5 реда — 3 пута контраваријантан и 2 пута коварија.

За неки тензор кажемо да је антисиметричан у одн. по два индекса, ако његове компоненте промене знак после измене ових индекса, нпр. ако је $A^{ijk}_{lm} = -A^{jik}_{lm}$.

Ако је тензор симетричан или антисиметричан у одн. по било која два контраваријантна и коваријантна индекса, назива се апсолутно симетричан одн. антисиметричан.

Покажимо да особина симетрије или антисиметрије неког тензора при ма којој трансформацији координата остаје очувано.

Узмимо тензор типа A^{ij} и претпоставимо да у систему са координатама x^i важи:

$$A^{ij}=A^{ji}$$

После трансформације коорд. имамо:

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} A^{kl}$$

, а заменом места k и l и узимајући $A^{kl}=A^{lk}$, добијамо:

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} A^{kl} = \bar{A}^{ji} \qquad (31)$$

јер је: $\bar{A}^{ji} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} A^{kl}$

У општем тензорском рачуну, као и у класичној теорији тензора, сваки тензор се може раставити на симетрични и антисиметрични тензор истог типа. Нпр. за двапут контраваријантни и једанпут коваријантни тензор A^{ij}_k бисмо имали:

$$A^{ij}_k = \frac{1}{2}\left(A^{ij}_k + A^{ji}_k\right) + \frac{1}{2}\left(A^{ij}_k - A^{ji}_k\right) \quad \ldots (32)$$

Операције са тензорима

За два тензора кажемо да су једнаки ако су истог типа и ако су им одговарајући елементи једнаки. Збир два тензора дефинише се као скуп збирова одговарајућих елемената свих тензора чиме се добија тензор истог типа. Нпр. збир тензора A^{ij} и B^{ij} је тензор $C^{ij}=A^{ij}+B^{ij}$.

Производ тензора и скалара је скуп производа тог скалара и одговарајућих компоненти датог тензора, а то је опет тензор истог типа као и дати тензор:

$$C^{ij} = \lambda A^{ij}$$

Спољашњи и унутрашњи производ

Скуп производа елемената два тензора, нпр. скуп $A^i B_{jk}$, представља тензор чији је ред једнак збиру редова датих тензора и назива се спољашњи производ тензора. Обрнуто не важи: сваки тензор не може се приказати као спољашњи производ два тензора нижег ранга (реда).

спољашњег производа

Ако се изједначе један горњи и један доњи индекс тензора и изврши сумирање по том индексу, добија се нови тензор чији је ред за два нижи од реда почетног тензора. Та операција је контракција тензора. Нпр. ако се у тензору A^{ijk}_{lm} стави $m=k$, добиће се нови тензор који се у смислу Ајнштајнове конвенције може писати $A^{ijk}_{lk} = B^{ij}_{l}$ и то је тензор трећег реда. Ако се стави $l=j$ добиће се $B^{ij}_{j} = C^{i}$, тј. тензор првог реда.

Спроведе ли се спољашње множење тензора и потом контракција, добиће се нови тензор који се назива унутрашњи производ тензора. Нпр. за тензоре A^{ij}_{k} и B^{l}_{mn} спољашњи производ даће скуп $A^{ij}_{k} B^{l}_{mn}$. Стављајући $l=k$ добијамо унутрашњи производ $A^{ij}_{k} B^{k}_{mn} = C^{ij}_{mn}$, а за $l=k$ и $m=j$, добија се други унутрашњи производ $A^{ij}_{k} B^{k}_{jn} = D^{i}_{n}$.

проверити!

— Покажимо да унутрашњи производ задржава тензорску природу.

коваријантног

Пример: формирајмо унутрашњи производ вектора A_i и тензора B^{jk} за $j=i$

$$C^{k} = A_i B^{ik} \qquad (33)$$

У новим коорд. је:

$$\bar{C}^{k} = \bar{A}_i \bar{B}^{ik}.$$

Према (19) и (24) имамо:

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{i}} A_k, \qquad \bar{B}^{ik} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{l}} \cdot \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{m}} B^{lm},$$

одакле се добија

$$\overline{C}^k = \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^e}}_{\delta^l_e} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m} A_l B^{em} = \delta^l_e \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m} A_l B^{em} \underset{e=l}{=} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m} A_l B^{lm}, \text{ итд.}$$

$$\overline{C}^k = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^m} C^m$$ → ова релација показује да је скуп (33) заиста контраваријантни вектор, само што се појављује преостали индекс m.

Закон количника. На основу наведених операција са тензорима може се формулисати један општи критеријум за утврђивање тензорског карактера. Ако имамо неку непознату величину X, која зависи од извесног броја индекса, па образујемо унутрашњи производ ове величине са неким тензором A, резултат ове операције неће увек бити тензор јер ова величина X не мора имати тензорску природу.

Критеријум:

Ако је унутрашњи производ неке непознате величине X са произвољним тензором A неки познати тензор B, тада је непозната величина X такође тензор, а из распореда индекса изводимо закључак о његовом типу. Овај критеријум је познат као закон количника, јер показује формалну аналогију са одређивањем непознате величине X из алгебарске једначине $XA = B$.

Пример: Ако је $X_{(i,j)} A^{ij}$ скалар, величина X биће двапут коваријантни тензор X_{ij}, а ако је $X_{(i,j,k)} A^k_j = B^i$, величина X биће тензор трећег реда X^{ij}_k.

Доказ за другу тврдњу је дат у књизи.